

**Prof. Dr. Alfred Toth**

## **Einführung in die elementare qualitative Arithmetik**

*Dr. Engelbert Kronthaler herzlich gewidmet*

1. In der quantitativen Mathematik gibt es nur eine einzige Zählweise, die lineare, welche durch die Peano-Axiome festgelegt ist. Weshalb dies so ist, ist auch den meisten Mathematikern nicht bewußt. Der Grund liegt darin, daß die zweiwertige aristotelische Logik, welche die Grundlage für die quantitative Mathematik bildet, in ihrer Basisdichotomie

$$L = [0, 1]$$

keine Vermittlung zwischen den Werten 0 und 1 zuläßt, d.h. sie sind absolut. Nun hatte bereits Günther festgestellt: "Beide Werte einer solchen Logik aber sind metaphysisch äquivalent. Das heißt, man kann sie beliebig miteinander vertauschen. Sie verhalten sich zueinander in einer totalen logischen Disjunktion, wie rechts und links. Es gibt keinen theoretischen Grund, welche Seite rechts und welche Seite links von der Zugspitze ist. Die Benennung beruht auf einer willkürlichen Entscheidung, und wenn man seinen Standpunkt wechselt, sind die rechte und die linke Seite miteinander vertauscht (Günther 2000, S. 230 f.). Damit gilt natürlich

$$L = [0, 1] = [1, 0] = L^{-1}.$$

0 oder Position und 1 oder Negation (bzw. umgekehrt) stehen also erkenntnistheoretisch für das objektive Objekt einerseits und für das subjektive Subjekt andererseits.

2. Tatsächlich ist es aber so, daß die Begriffe Objekt und Subjekt ohne einander sinnlos sind. Ein Objekt kann nur dann ein solches sein, wenn es ein solches für ein Subjekt ist. Und ein Subjekt kann es nur dann geben, wenn es ein Objekt gibt, von dem es sich unterscheidet. Ontisch gesehen ist es daher nur dann sinnvoll, von einem Objekt zu sprechen, wenn es von einem Subjekt wahrgenommen wird. Durch die Wahrnehmung erhält aber das Objekt – als vom Subjekt Wahrgenommenes – Subjektanteile, und das Subjekt – als das Objekt Wahrnehmendes -. erhält Objektanteile. Es ist daher, wie bereits in

Toth (2015a) ausgeführt, nötig, statt von  $L$  von einem Quadrupel von  $L$ -Funktionen der Form

$$L_1 = [0, [1]] \quad L_1^{-1} = [[1], 0]$$

$$L_3 = [[0], 1] \quad L_2^{-1} = [1, [0]]$$

auszugehen, die im Gegensatz zu  $L = L^{-1}$  paarweise ungleich sind. Man kann diese vier  $L$ -Funktionen unter Vernachlässigung der Positionen der Werte in den vier Gleichungen durch

$$0 = f(1)$$

$$1 = f(0)$$

ausdrücken. Je nachdem, ob man 0 oder 1 die erkenntnistheoretische Funktion des Objektes und 1 oder 0 diejenige des Subjektes zuweist, formalisieren daher die beiden letzten Gleichungen das subjektive Objekt und das objektive Subjekt. Rein formal wird für die Transformation

$$\tau: \quad L \rightarrow (L_1, L_1^{-1}, L_2, L_2^{-1})$$

lediglich ein Einbettungsoperator der Form

$$E: \quad x \rightarrow [x] \text{ (mit } x \in (0, 1))$$

benötigt, d.h. kein dritter Wert, welcher als (substantielles) Tertium die aristotelische Basis der Logik zerstört. Wenn man  $E$  als Tertium bezeichnen will, dann handelt es sich um ein differentielles Tertium, das tatsächlich innerhalb der aristotelischen Logik nicht vorgesehen ist.

3. Wie man sieht, spielt innerhalb des Quadrupels von  $L$ -Funktionen allerdings nicht nur die Tatsache, ob ein Wert eingebettet oder nicht-eingebettet ist, eine Rolle, sondern auch, wo der Wert, d.h. die Zahl, steht, denn wie bereits gesagt, gilt

$$[0, [1]] \neq [[1], 0]$$

$$[[0], 1] \neq [1, [0]]$$

$$[1, [0]] \neq [[0], 1]$$

$$[[1], 0] \neq [0, [1]].$$

Jede Zahl ist somit nicht nur von  $E$ , sondern auch von einem Ort  $\omega$  abhängig, d.h. für jede Peanozahl  $x$  gilt

$$x = f(E, \omega),$$

und diese Abhängigkeit ist es, was sie zur qualitativen Zahl macht (vgl. Toth 2015b-d) und nicht etwa die Orthogonalität von Paaren von Peanozahlen (vgl. Günther 1991, S. 419 ff.). In der in diesem Aufsatz zu skizzierenden qualitativen Arithmetik erhält man für Paare von Peanozahlen  $P = (x, y)$  unter Anwendung von  $x = f(E, \omega)$  und  $y = f(E, \omega)$  statt der einen, linearen Zählweise der quantitativen Arithmetik drei Zählweisen mit je acht verschiedenen qualitativen Zahlen.

3.1. Sind  $x$  und  $y$  linear, so liegt in meiner Terminologie die adjazente Zählweise vor

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x_i & y_j & & y_i & x_j & & y_j & x_i & & x_j & y_i \\
 \emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_j & \emptyset_i & & \emptyset_j & \emptyset_i \\
 & & \times & & & \times & & & \times & & \\
 \emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_j & \emptyset_i & & \emptyset_j & \emptyset_i \\
 x_i & y_j & & y_i & x_j & & y_j & x_i & & x_j & y_i.
 \end{array}$$

3.2. Sind  $x$  und  $y$  orthogonal, so liegt in meiner Terminologie die subjazente Zählweise vor

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & x_j & & \emptyset_j & x_i & & x_j & \emptyset_i \\
 y_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & y_j & & \emptyset_j & y_i & & y_j & \emptyset_i \\
 & & \times & & & \times & & & \times & & \\
 y_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & y_j & & \emptyset_j & y_i & & y_j & \emptyset_i \\
 x_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & x_j & & \emptyset_j & x_i & & x_j & \emptyset_i.
 \end{array}$$

3.3. Sind  $x$  und  $y$  diagonal, so liegt in meiner Terminologie die transjazente Zählweise vor

|               |               |               |               |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$         | $\emptyset_j$ | $\emptyset_i$ | $x_j$         | $\emptyset_j$ | $x_i$         | $x_j$         | $\emptyset_i$ |
| $\emptyset_i$ | $y_j$         | $y_i$         | $\emptyset_j$ | $y_j$         | $\emptyset_i$ | $\emptyset_j$ | $y_i$         |
| $\times$      |               | $\times$      |               | $\times$      |               |               |               |
| $\emptyset_i$ | $y_j$         | $y_i$         | $\emptyset_j$ | $y_j$         | $\emptyset_i$ | $\emptyset_j$ | $y_i$         |
| $x_i$         | $\emptyset_j$ | $\emptyset_i$ | $x_j$         | $\emptyset_j$ | $x_i$         | $x_j$         | $\emptyset_i$ |

(In diesen Schemata referieren die Indizes auf die Subjektstandpunkte. Diese ermöglichen die Kompatibilisierung unserer qualitativen Arithmetik mit der von Kronthaler geschaffenen Mathematik der Qualitäten (vgl. Kronthaler 1986), die auf der polykontexturalen Logik beruht, welche ein Verbundsystem von zweiwertigen aristotelischen Logiken ist und jedem Subjekt seine eigene zweiwertige Logik zugesteht. Da hier aber nur das Subjekt iterierbar ist, während das Objekt, wie Hegel sagte, totes Objekt bleibt, gibt es in der Mathematik der Qualitäten im Gegensatz zu unserer qualitativen Arithmetik keine Vermittlung der Werte innerhalb der auch in der Mathematik der Qualitäten unangetasteten Dichotomie  $L = [0, 1]$ .)

4. In der qualitativen Arithmetik kann also jede Peanozahl  $x$  vermöge  $x = f(E, \omega)$  entweder adjazent, subjazent oder transjazent gezählt werden, wobei es acht Möglichkeiten in jeder der drei Zählweisen gibt. Das bedeutet, daß bereits die elementare und nur quantitativ eindeutige Peano-Addition ( $0 + 1$ ) qualitativ in 24 Möglichkeiten mehrdeutig ist. Jede qualitative Zahl ist somit in der allgemeinen Form

$x_{n, m}$

notierbar, darin  $n$  den Wert von  $E$  und  $m$  den Wert von  $\omega$  angibt. Die quantitative Addition ( $0 + 1$ ) ist somit ein Spezialfall für  $n = m$ . Beschränken wir uns zur Illustration auf das L-Quadrupel, so erhält man zunächst die folgenden Ungleichungen

$$[0, [1]] \neq [[1], 0] \rightarrow (0, 1_{-1}) \neq (1_{-1}, 0)$$

$$[[0], 1] \neq [1, [0]] \rightarrow (0_{-1}, 1) \neq (1, 0_{-1})$$

$$[1, [0]] \neq [[0], 1] \rightarrow (1, 0_{-1}) \neq (0_{-1}, 1)$$

$$[[1], 0] \neq [0, [1]] \rightarrow (1_{-1}, 0) \neq (0, 1_{-1}).$$

Damit entsteht allerdings eine Ambiguität zwischen Subjazenzen und Transjazenzen, denn z.B. kann  $(0, 1_{-1})$

0

1

oder

0

1

bedeuten. Daher muß auch bei Zahlenpaaren mit festgelegter Ordnung nicht nur die E-, sondern auch die  $\omega$ -Position indiziert werden, d.h.

0

$$1 = (0_{n,m}, 1_{n-1,m}),$$

aber

0

$$1 = (0_{n,m}, 1_{n-1,m+1}),$$

wogegen

0

$$1 = (0_{n,m}, 1_{n-1,m-1}), \text{ usw.}$$

Es ist somit möglich, alle 3 mal 8 Zählweisen der qualitativen Arithmetik für jede quantitative Peanozahl  $x$  durch  $x = f(E, \omega)$  qualitativ darzustellen. Da ferner alle 24 Zählweisen paarweise voneinander verschieden sind, ist die

Abbildung von quantitativen auf qualitative Zahlen bijektiv. Man braucht also nicht wie in der Mathematik der Qualitäten auf die Korzybski-Mehrdeutigkeit auszuweichen, welche dazu führt, daß kein einziger Satz der Mathematik der Qualitäten beweisbar ist. Dagegen werden alle Sätze einer qualitativen Mathematik, welche auf der Basis der qualitativen Arithmetik errichtet werden wird, auch beweisbar sein.

## Literatur

Günther, Gotthard, Idee und Grundriß einer nicht-aristotelischen Logik. 3. Aufl. Hamburg 1991

Günther, Gotthard, Die amerikanische Apokalypse. München 2000

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Jenseits von wahr und falsch. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Zur Arithmetik der Relationalzahlen I-II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

Toth, Alfred, Qualitative Arithmetik des Zählens auf drei. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015c

Toth, Alfred, Qualitative Zahlenfelder, Zahlenschemata und ontische Modelle. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015d

8.5.2016